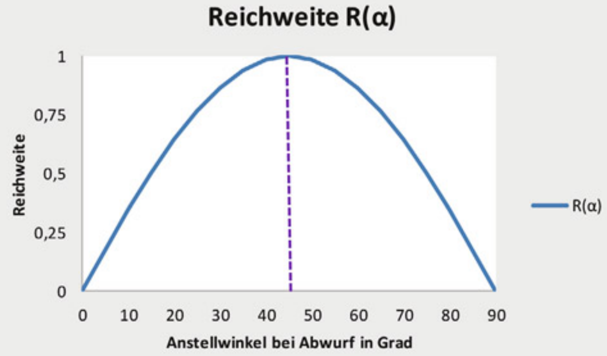
Ralf Liebscher

Mathematik verstehen – Grundwissen für das Studium eines MINT-Fachs

Mit historischen Anmerkungen zur Mathematik und Übungen



Universitätsverlag Halle-Wittenberg

Mathematik verstehen

Für meine Enkel
Ben und Niclas

Ralf Liebscher

Mathematik verstehen

Grundwissen für das Studium eines MINT-Fachs

Mit historischen Anmerkungen zur Mathematik und Übungen

Universitätsverlag Halle-Wittenberg uvHW

Ralf Liebscher (Jahrgang 1955) studierte von 1976–1981 Numerische Mathematik an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg (MLU) mit Abschluss als Diplom-Mathematiker. Tätigkeit als Forschungsingenieur in der Industrie, danach 1985–1993 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Wirtschaftsinformatik an der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der MLU in Halle/S mit Promotion in Wirtschaftsinformatik. Nach kurzen Tätigkeiten als Dozent und Informatiker war er 23 Jahre in der Deutschen Versicherungswirtschaft tätig, davon zuletzt 18 Jahre als Versicherungsmathematiker.

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in
der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische
Daten sind im Internet über *http://d-nb.de* abrufbar.

Umschlaggestaltung: Horst Stöllger – pixzicato, Hannover

ISBN 978-3-86977-291-2

Vorwort

Dieses Buch entstand, um Studierenden am Anfang ihres Studiums den Einstieg in die höhere Mathematik zu erleichtern. Es setzt das Abiturwissen voraus. Behandelt werden nacheinander ausgewählte Grundlagen der Mathematik, die in jedem Grundstudium eines MINT-Studienganges Teil des Lehrangebotes sind.

Es resultiert aus dem Dilemma, dass die Schulmathematik heute keine ausreichende Basis bietet, um gut auf ein Studium in einem MINT-Fach vorbereitet zu sein. Deshalb sind Sie am Anfang Ihres Studiums in der Situation, sich geeignete Lernmittel auf entsprechendem Niveau zu beschaffen, beispielsweise ein besonders gut geeignetes Buch zur Mathematik.

☛ *Von großem Vorteil ist es, wenn Sie das Buch längerfristig mit Gewinn nutzen können.*

Dieses Buch ist ein solches Lernmittel für Sie. Dazu sollten Sie den Text mit Herleitungen der Theorie (Sätze und Beweise), methodischen Erläuterungen und Beispielen nicht nur lesen, sondern durcharbeiten.

Es bietet Studierenden in verschiedener Hinsicht einen echten Mehrwert durch Schwerpunktsetzung und sinnvolle Zusammenstellungen, z.B. zu den mathematischen Beweisverfahren.

Sie können das Buch gut zur Vor- und Nachbereitung von Lehrveranstaltungen und zur Bearbeitung von Übungsaufgaben nutzen.

☛ *Am Beginn Ihres Studiums ist es wichtig, dass Sie sich Ihrer neuen Situation bewusst sind.*

Wodurch ist diese Situation für Erstsemester gekennzeichnet?

Das Studium ist ein neuer Lebensabschnitt, den Sie selbst aktiv gestalten müssen, wenn Sie das Studium erfolgreich absolvieren wollen. Mit dem leben und studieren am Studienort kommen Sie in ein neues soziales Umfeld. Sie müssen Ihre Studientage unter Beachtung der terminlich festgelegten Lehrveranstaltungen organisieren und zeitlich einteilen. Dazu gehören auch Zeitfenster für das Selbststudium und der Austausch mit anderen Studierenden. Überhaupt wird Kommunikation im Studium in seinen unterschiedlichen Formen und mit verschiedenen Partnern wichtig. Über längere Zeit entwickelt jeder ein Netzwerk. Intensive Arbeit mit erhöhtem Zeitaufwand erfordert i.a. die Vorbereitung auf Klausuren und auf die Prüfungen am Semesterende.

Wie schätzen Sie selbst Ihre mathematischen Voraussetzungen am Beginn des Studiums ein? Es ist sinnvoll, dies einmal zu reflektieren oder mit anderen Personen darüber zu sprechen.

Aus Sicht der Hochschule sehen viele Hochschullehrerinnen und Hochschullehrer die Voraussetzungen kritisch, die heutige Abiturienten für ein Studium in einem der genannten Fächer mitbringen. Was die mathematischen Grundfertigkeiten angeht, wird beklagt, dass elementares Schulwissen und notwendige Rechenfertigkeiten nicht mehr gefestigt werden. Das liegt offenbar nicht daran, dass der Lehrstoff verkürzt wäre. Sondern dass durch erhöhte Stofffülle zu wenig Zeit bleibt, um mathematische Fähigkeiten zu entwickeln. Diese können sich junge Leute nur aneignen, wenn typische Fragestellungen mit entsprechenden Aufgaben bearbeitet werden. Dazu gehören das Erkennen des mathematischen Gehaltes einer Fragestellung, der Übergang zur Formalisierung und Modellierung sowie die Ermittlung der Lösungen und deren Diskussion.

Im Studium werden die Grundfertigkeiten vorausgesetzt, für Auffrischung und Vertiefungen werden inzwischen überall sogenannte Brückenkurse (Vorkurse) angeboten.

☛ *Die Nutzung solcher Angebote vor Semesterbeginn ist Ihnen sehr zu empfehlen.*

An manchen Hochschulen werden zu Studienbeginn Standardtests mit immer gleichen Aufgaben durchgeführt. Ziel ist es, die Ergebnisse über alle

Teilnehmer von Jahr zu Jahr vergleichen zu können. Dabei zeigte sich in den letzten Jahren ein klarer Trend zu schlechteren Ergebnissen.

Das Schulsystem in Deutschland in Verantwortung der Bundesländer hatte bisher nicht zu Abiturprüfungen mit bundesweit einheitlichen Mathematikaufgaben geführt. Es gab in den letzten Jahren mehrfach massive Beschwerden über zu schwere oder ungeeignete Aufgaben beim Mathematikabitur. Das war wiederholt auch Thema in den Medien.

Dazu kam im Jahr 2020 völlig überraschend die weltweite Corona-Pandemie. Diese stellte die Ausbildung an Schulen und Hochschulen vor neue Herausforderungen. Das Wort *Homeoffice* steht als Synonym für die oftmals schwierige Situation der Lernenden und Studierenden.

☛ *Das vorliegende Buch erfüllt eine Brückenfunktion. An ausgewählten Beispielen wird Ihnen aufgezeigt, wie mathematisches Denken erlernt wird, wie Standardmethoden funktionieren und wie eine mathematische Theorie entwickelt wird.*

Ab Kapitel 2 finden Sie jeweils nach der Überschrift **Lernziele** *zum Inhalt des Kapitels. Sie zeigen Ihnen optisch „einen blauen Faden" durch das Buch. Am Ende der Kapitel 2 bis 12 finden Sie jeweils passende Übungsaufgaben, deren Lösungen Sie am Ende des Buches nachschlagen können.*

Für den Inhalt ist bewusst eine andere Gliederung gewählt worden, als sie ein klassisches Mathematiklehrbuch aufweist. In den Kapiteln werden wir ausgehend von der Theorie speziell ausgewählte, mathematische Themen besprechen und dazu typische Aufgaben bearbeiten. Sie lernen dabei, welche Erfahrungen und Fertigkeiten Sie ableiten können, und wie höhere Mathematik vermittelt wird. Die Standardaufgaben mit überschaubarem Umfang werden weitgehend durchgearbeitet dargestellt. An einigen Stellen sind Kenntnisse erforderlich, die in den ersten Semestern an einer Hochschule gelehrt werden. In diesem Fall führen wir die wichtigsten Grundbegriffe ein und erläutern grundlegende Zusammenhänge. Eine vollständige Behandlung einzelner Teilgebiete der Mathematik wird nicht angestrebt.

Der Text enthält zahlreiche historische Anmerkungen zur Entwicklung der Mathematik. Sie zeigen, wie eine Fragestellung entstanden war, und welche großen Vertreter des Faches den Anfang oder die Weiterentwicklung einer Theorie geprägt hatten. Der Autor hatte mehrfach folgende Erfahrung gemacht: Historische Betrachtungen eignen sich auch nach einem abgeschlossenen Studium gut, um mathematische Kenntnisse zu vertiefen und später noch „mathematisch neugierig“ zu bleiben. Die historischen Anmerkungen entstammen in der Mehrzahl der Sekundärliteratur. Ein Studium der Originalquellen war nur in Ausnahmefällen möglich.

Am Ende sei der Wunsch ausgesprochen, dass Sie die Anforderungen Ihres Studiums bewältigen. Das vorliegende Buch wird Ihnen mit Sicherheit ein hilfreicher Begleiter sein.

Abgesehen vom Prüfungsstress soll die Beschäftigung mit der Mathematik auch Spaß machen. Es lohnt sich, wenn Sie die Bereitschaft aufbringen, einen entsprechenden Arbeitsaufwand und die notwendige Zeit zu investieren.

In diesem Sinne lade ich Sie – liebe Leserinnen und Leser – ein, zu einer kurzweiligen und interessanten Lektüre über ausgewählte Aspekte der Mathematik und ihrer Entwicklung.

Ralf Liebscher

Wer sollte dieses Buch lesen – und was bietet es?

Im Grundstudium eines MINT-Studienfaches sowie im Studium der Wirtschaftswissenschaft kommt der Mathematikausbildung eine zentrale Bedeutung zu.

Dieses Buch richtet sich speziell an folgende Zielgruppen:

- Abiturienten, die ein Studium in einem MINT-Fach aufnehmen werden,
- Studierende eines MINT-Studienganges in den ersten Semestern,
- Mathematisch Vorgebildete, die Grundwissen auffrischen wollen,
- An mathematik-historischen Darstellungen interessierte Lesende.

☛ *Es ist für den Einstieg in die höhere Mathematik konzipiert und setzt auf dem Abiturwissen auf. Für Anfängerinnen und Anfänger im Studium ist es ein idealer Begleiter für die Wissensaneignung im Fach Mathematik in den ersten Semestern.*

Es wurde methodisch anders aufgebaut als ein klassisches Lehrbuch eines Teilgebietes der Mathematik. In den ersten Kapiteln ist das Abstraktionsniveau niedrig. Es steigt analog zum Schwierigkeitsgrad bis Kapitel 12 an. Das macht das Buch für Anfängerinnen und Anfänger leichter lesbar und im Inhalt besser verständlich. Die zahlreich eingefügten Beispiele und methodischen Hinweise erhöhen das Verständnis für die dargestellte Theorie. Die ab Kapitel 2 vorangestellten **Lernziele** geben eine gute Orientierung zu Inhalt und Schwerpunkten.

Für mathematisch Vorgebildete bietet es bekannte Herleitungen zentraler mathematischer Aussagen mit entsprechenden Beweisen aus den gängigen Teilen eines Grundstudiums. Dazu werden die wichtigsten Fachbegriffe eingeführt und Zusammenhänge aufgezeigt und erläutert.

Eine Besonderheit des Buches ist die durchgängige Aufnahme mathematik-historischer Darstellungen. Damit gelingt ein Einblick in die Entwicklung der

Mathematik als Wissenschaft. Die Lesenden finden zahlreiche Fakten aus dem Leben und Wirken berühmter Vertreter des Faches.

Beim Lesen und Durcharbeiten des Buches können Sie inhaltlich folgendes erwarten:

- Methodische Hinweise für den Studienbeginn, zum strukturieren Ihres Studiums, zu anstehenden Prüfungen und zur Bewältigung von Frustsituationen
- Mathematische Beispiele von einfachen Fragen bis zu komplexeren Ansätzen
- Mathematische Theorie, dargestellt mit Definitionen, Sätzen und Beweisen aus den gängigen Teilgebieten eines Grundstudiums
- Hauptinhalte sind: Zahlenbereiche, Transfinite Mengenlehre, Elementare Zahlentheorie, Grundlagen der reellen Analysis mit Folgen und Reihen, sowie Differential- und Integralrechnung von einer Variablen und Lineare Algebra mit Abbildungen und Vektorräumen, Matrizen und Determinanten sowie Linearen Gleichungssystemen
- Besondere Themen wie Mathematische Beweisverfahren und Axiomatisierung
- Übungsaufgaben am Ende der Kapitel 2 bis 12 mit ausführlichen Lösungen und Hinweisen am Ende des Buches
- Möglichkeit zum Nachschlagen spezieller Fachbegriffe und deren Berechnungsmethodik, etwa zum Rang einer Matrix oder zur inversen Matrix
- Durchgängige Einbindung historischer Anmerkungen zur Entwicklung der Mathematik und zu berühmten Vertretern des Faches
- Berufliche Tätigkeitsfelder für Absolventen am Ende des Buches.

☛ *Sie können die einzelnen Kapitel unabhängig voneinander lesen und durcharbeiten, sofern Sie die gängigen Bezeichnungen kennen.*

Die vorangestellten **Lernziele** *dienen Ihnen als Orientierung. Deshalb können Sie das Buch zu verschiedenen Abschnitten in Ihrem Studium und auch zum Selbststudium nutzen.*

An mehreren Stellen im Text gibt es Verweise auf andere Kapitel oder Abschnitte. Diese **Querverweise** verdeutlichen Ihnen, wie Grundlagen und Teile der Theorie zusammenhängen.

Die zahlreichen mathematik-historischen Anmerkungen zeigen Ihnen, wie Fragestellungen und oft ganze Theorien entstanden waren. Natürlich auch, welche großen Wissenschaftler dazu Bahnbrechendes geleistet hatten. In den normalen Lehrveranstaltungen kommen diese historischen Aspekte fast immer zu kurz. Viele interessante Fragen und die damit befassten historischen Persönlichkeiten finden keine Erwähnung im normalen Lehrbetrieb eines Grundstudiums. Die historischen Anmerkungen wurden separat gekennzeichnet und enden mit einem ausgefüllten Bullet ●

An einigen Stellen werden Themen angesprochen, die *nicht* Bestandteile von Einführungsveranstaltungen sind. Beispielsweise Begriffe und Zusammenhänge aus der Topologie oder aus der nichteuklidischen Geometrie.

Das Personenregister zeigt mehr als 100 Wissenschaftler (mehrheitlich Mathematiker) mit ihren Lebensdaten, auf die wir uns im Text beziehen. Das Sachverzeichnis listet zentrale Fachbegriffe auf – mit der Seitenangabe ihrer Erläuterung.

Inhaltsverzeichnis

1. Hinweise für einen erfolgreichen Studienbeginn

Mit der Aufnahme eines Studiums ändert sich im Fach Mathematik fast alles für Sie. In den Lehrveranstaltungen werden Sie schrittweise in die höhere Mathematik eingeführt. Die wird anders gelehrt und erlernt als Sie das von der Schule kennen. Höhere Mathematik setzt methodisch andere Schwerpunkte. Die Beschäftigung damit ist auch anspruchsvoller.

Blicken wir kurz zurück: Die Schulmathematik zeichnet sich dadurch aus, dass vorrangig mathematische Grundfertigkeiten erlernt werden. Diese wenden die Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung konkreter Fragestellungen an. Das sind wahrscheinlich auch Ihre Erfahrungen aus dem Mathematikunterricht in der Schule.

Neben den Grundrechenarten und dem Rechnen mit Brüchen, der Prozentrechnung sowie Potenzen und Wurzeln, der elementaren Geometrie und der Gleichungslehre von Proportionen (Dreisatz) bis zu den quadratischen Gleichungen werden auch Funktionen verschiedenen Typs behandelt. Das betrifft vor allem lineare Funktionen, Potenzfunktionen und deren Umkehrungen sowie die e-Funktion und die Winkelfunktionen, jeweils als Funktion von einer Variablen.

Weiterhin Kegelschnitte, lineare Gleichungssysteme, elementare Mengenlehre und Logik sowie Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik mit Anwendungen. Wenn Sie das Gymnasium besucht hatten, auch die Grundlagen der Differential- und Integralrechnung mit typischen Anwendungen.

Bei den Zahlenbereichen geht es von den natürlichen Zahlen, den ganzen Zahlen über die rationalen Zahlen (Brüche) bis zu den reellen Zahlen. Besondere Berücksichtigung finden die beiden irrationalen Zahlen π und e.

Dabei werden die Grundbegriffe eingeführt und wesentliche Zusammenhänge vermittelt, die sich für die Bearbeitung von Anwendungsaufgaben eignen.

1.1 Was wird bis zum Abitur nicht vermittelt?

Es ist i.a. nicht möglich die Entwicklung einer mathematischen Theorie aufzuzeigen. Diese geht von Grundannahmen (Axiomen) aus. Dann werden Begriffe (Definitionen) eingeführt, und die Theorie schreitet mit bewiesenen mathematischen Aussagen (Sätzen) und Folgerungen daraus fort. Dazu bedarf es der Erweiterung mathematischer Grundlagen: Beispielsweise den Begriff der unendlichen Menge, des Grenzwertes und bei reellen Funktionen Stetigkeit und Differenzierbarkeit als wesentliche Eigenschaften.

Dazu gehören speziell einige Beweistechniken, die wiederum Kenntnisse in Aussagenlogik, Mengenlehre oder Zahlentheorie (Teilbarkeit) voraussetzen. In der Algebra erfolgt der Übergang zur Strukturmathematik mit der Einführung von grundlegenden Begriffen wie Gruppe, Ring und Körper. Dargestellt wird das meistens anhand der Zahlenbereiche. Diese werden auf den Bereich der komplexen Zahlen erweitert, um beispielsweise alle Nullstellen einer Polynomgleichung zu ermitteln.

Für schon bekannte Standardaufgaben werden Ihnen neue Instrumentarien vorgestellt. Zur Lösung linearer Gleichungssysteme der Gauß-Algorithmus und die Cramersche Regel. Basis sind der Matrizenkalkül und (bei der Cramerschen Regel) die Berechnung von Determinanten.

Es wird gezeigt, dass in einer Gleichung nicht immer der Wert für eine Unbekannte gesucht wird. Manchmal auch eine Funktion, welche die Gleichung erfüllt. Steht in der Gleichung mindestens eine Ableitung einer Funktion, müssen Sie eine Differentialgleichung lösen.

Im Studium wird Ihnen aufgezeigt, wie verschiedene mathematische Teilgebiete oder Theorien zusammenhängen. Das betrifft vor allem folgende, lange bekannten Verbindungen: Geometrie und Algebra, Algebra und Gleichungslehre oder die Mengenlehre mit den Grundlagen der Analysis.

1.2 Modulsystem und Lehrveranstaltungen im Studium

Mit dem sogenannten Bologna-Prozess wurde europaweit die Struktur des Studiums in der Unterteilung der Abschlüsse in Bachelor und Master eingeführt. An einigen Einrichtungen in Deutschland wird auch heute noch (wie früher üblich) das Diplom vergeben. Abweichend davon erreichen Lehramtsstudierende zunächst das 1. Staatsexamen, nach erfolgreichem Referendariat mit Abschluss des Studiums das 2. Staatsexamen.

☛ *Wenn Sie einen Bachelor-Studiengang absolvieren: Dann sei Ihnen angeraten, bereits frühzeitig einmal die Strukturierung ihres Studiums als Abfolge von Modulen zu betrachten.*

Für jeden Studiengang gibt es ein *Modulhandbuch* mit den zugehörigen Pflichtmodulen und weiteren wahlobligatorischen Modulen. Daraus entnehmen Sie wichtige Informationen über die Lernziele und Anforderungen in Ihrem Studiengang und zur Anerkennung Ihrer Studienleistungen.

Gemessen wird Ihre Studienleistung mit ECTS-Punkten. Diese werden Ihnen für erfolgreich absolvierte Module des Studienganges auf Ihrem Studienkonto gutgeschrieben. In Deutschland werde sie meistens Leistungspunkte genannt, abgekürzt mit LP.

Für jedes Pflichtmodul wie auch für wahlobligatorische Module zeigt Ihnen das Modulhandbuch die erzielbare LP-Zahl, die Ihnen nach erfolgreichem Abschluss des Moduls gutgeschrieben wird. In der Mathematik erzielen Sie z.B. für ein Modul, welches für ein Semester konzipiert ist, mit dem Besuch der Vorlesung 6 LP und der zugehörigen Übung nochmals 6 LP. Also für das erfolgreich abgeschlossene Modul 12 LP. Für die Modulprüfung am Ende des Semesters erhalten Sie eine Note.

Bei einer Regelstudienzeit von 6 Semestern bis zum Erreichen des Bachelorabschlusses müssen Sie mindestens 180 LP sammeln. Deshalb sollten Sie durchschnittlich 30 LP pro Semester als eigene Studienleistung anstreben. Aus der Belegung Ihrer Pflichtmodule in einem Semester können Sie schnell die erreichbaren Leistungspunkte ermitteln und eventuell noch wahlobligatorische Module einplanen.

Auf diese Weise erhalten Sie einen groben Plan für den Ablauf Ihres Studiums. Dieser orientiert sich zunächst an den angebotenen Lehrveranstaltungen für die Pflichtmodule im jeweiligen Semester. Je nach Interesse oder späterer Spezialisierung wählen Sie zusätzlich noch wahlobligatorische Module aus.

Einige Hinweise zu den Lehrveranstaltungen

Vorlesungen sind für die Erstsemester eine neue Form der Wissensvermittlung, zu der sie keine Erfahrungen besitzen. Die Übungen ähneln dem Unterricht am Gymnasium, sind in der Regel aber anspruchsvoller. Nachfolgend einige Ratschläge.

Vorlesungsbesuch und Mitschrift

Der Besuch der Vorlesungen des Grundstudiums sollte eine Pflichtaufgabe für Sie sein. Die Vorlesungen sind Ihre Basis, um die Entwicklung einer mathematischen Theorie durch die Ausführungen der Hochschullehrerin bzw. des Hochschullehrers zu verstehen. Dort begegnet Ihnen meistens erstmals das grundlegende Schema in der Mathematik von: Definition, Satz, Beweis und Folgerung für die Herleitung und Darstellung mathematischer Aussagen.

Absolut ratsam ist auch eine regelmäßige Nachbereitung und Verarbeitung der Theorie aus den letzten Vorlesungen. Heute werden Ihnen fast überall auch Skripte der Vorlesung zur Verfügung gestellt. Der Umgang mit Skripten erfolgt in unterschiedlicher Weise. Manche Lesende stellen die Skripte vor der Veranstaltung bereit, andere erst danach und manchmal nur unvollständig. Da werden z.B. die Beweise der Sätze weggelassen, die in der Vorlesung aber demonstriert werden.

☛ *Es ist abzuraten, sich nur auf Skripte zu verlassen, und die Vorlesung selbst nicht zu besuchen. Sonst besteht die Gefahr, dass Sie selbst Informationsdefizite aufbauen.*

Je nachdem wie die Vorlesung abläuft, sollten Sie eine eigene Mitschrift anfertigen. Das wird einfacher, wenn das Skript vorher zur Verfügung steht. Wenn es – wie früher üblich – ausschließlich einen Tafelanschrieb gibt, ist es oft problematisch, gleichzeitig von der Tafel abzuschreiben und den Ausführungen der Lesenden bzw. des Lesenden zu folgen. Je besser die technische Unterstützung einer Vorlesung ist, umso leichter können Sie eine eigene, vollständige Vorlesungsschrift erzeugen.

Falls Ihre Mitschrift nach der Vorlesung größere Lücken aufweist, sollten Sie versuchen, diese z.B. durch Austausch mit anderen Studierenden aufzufüllen.

Übungsgruppe und Übungsaufgaben

Am Semesterbeginn werden Sie entsprechend des Moduls einer Übungsgruppe zugeordnet. Zur Erbringung Ihrer Studienleistung besteht (an allen Einrichtungen) für Sie die Notwendigkeit zur Bearbeitung vorgegebener Übungsaufgaben. Diese sind meistens als Übungsblätter oder Serien für den Stoff eines Semesters konzipiert. Die Ergebnisse Ihrer Bearbeitung müssen Sie zu festgelegten Terminen abgeben. Aufgabe von Tutoren (Doktoranden oder Studierende höheren Semesters) ist es, die bearbeiteten Aufgaben zu korrigieren und die Lösungen vor der Übungsgruppe zu erläutern.

Die Korrektur der Übungsaufgaben ermöglicht es den Tutoren (und damit auch der Hochschullehrerin, dem Hochschullehrer) zu erkennen, wie die Theorie und typische Anwendungen verstanden werden. Dabei ist es möglich, die Bewältigung unterschiedlicher Schwierigkeitsgrade bei den Aufgaben vergleichen zu können.

Die Bearbeitung der meisten Aufgaben übersteigt die Mittel, die jemand aus der Schulmathematik mitbringt. Bei den Aufgaben werden Sie gezwungen, einerseits Ihr schon vorhandenes Basiswissen (Schulwissen) anzuwenden, und andererseits, dieses mit neu erlernten Aspekten der mathematischen Theorie oder Methodik zu verbinden.

In der Übungsgruppe können Sie Ihre Lösungen präsentieren oder auch gezielt Fragen zur Überwindung von Schwierigkeiten stellen. Ein guter Austausch innerhalb der Übungsgruppe ist oft ein Gewinn für alle Teilnehmer.

Im Internet werden inzwischen für fast alle Standardaufgaben fertige Lösungen präsentiert. Hier besteht die Gefahr, dass Studierende dort aufgeführte Lösungen kritiklos abschreiben und so leider nicht geistig durchdringen. Davor muss gewarnt werden:

☛ *Gesichertes mathematisches Wissen können Sie sich nur aneignen, wenn Sie zuvor die mathematische Herleitung verstanden hatten.*

Einige Beispiele, wodurch sich typische Übungsaufgaben des Grundstudiums auszeichnen:

- Herleitung komplizierter Formeln aus bekannten einfachen Formeln
- Lösung einer konkreten Aufgabe mit einer neu erlernten Methode
- Klassifizierung der Lösbarkeit eines Problems in Abhängigkeit von Parametern
- Kleiner Beweis eines Zusammenhangs mit bekannten Mitteln aus der Theorie.

Die Bearbeitung der Übungsaufgaben wird für Sie und jeden anderen Studierenden registriert. Ihr Gesamtergebnis kann am Ende des Semesters oder Studienjahres neben den Klausurergebnissen als Kriterium für die Zulassung zur Prüfung dienen. Eventuelle damit im Zusammenhang stehende juristische Aspekte können hier nicht diskutiert werden.

Arbeitsstil und Zeiteinteilung

Die Aneignung der Mittel und Methoden der höheren Mathematik gelingt nur den wenigsten Studierenden ohne intensive Arbeit. Am Anfang sind der hohe Abstraktionsgrad und die formale mathematische Darstellung in deduktiver Schlussweise gewöhnungsbedürftig. Je schneller es Ihnen gelingt, die Art der Darstellung mathematischer Sachverhalte für Ihre eigene Arbeit aufzunehmen, umso besser können Sie einen effektiven Arbeitsstil (in den ersten Monaten des Studiums) entwickeln.

Zu Ihrem Arbeitsstil gehört auch die Nutzung von Fachliteratur. Die Hochschullehrerinnen und Hochschullehrer empfehlen eine Auswahl konkreter Titel. Sie können aber auch andere Bücher mit Gewinn nutzen, wie z.B. das hier vorliegende Buch.

Besonders wichtig sollte Ihnen die Strukturierung Ihres Studientages sein. Denn neben dem Besuch der Lehrveranstaltungen müssen Sie Zeitfenster für das Selbststudium einplanen. Dazu gehören mindestens die Vor- und Nachbereitung der Vorlesungen und die Bearbeitung der Übungsaufgaben, deren Ergebnisse demnächst vorzulegen sind.

Wenn die Möglichkeit besteht, an „Lernteams“ außerhalb der Übungsgruppe teilzunehmen, um z.B. die Übungsaufgaben gemeinsam zu bearbeiten, können Sie das ausprobieren. Ob damit die Effektivität Ihrer Arbeit verbessert wird, müssen Sie selbst einschätzen. Sie sollten dann entscheiden, wie lange Sie an dieser Form der Gruppenarbeit teilnehmen wollen.

Höhere Mathematik in größerem Umfang zu erlernen und zu verstehen, wird vorrangig eine individuelle Aufgabe sein. Ihr Lernerfolg wird am Ende auch individuell abgeprüft.

1.3 Prüfungen in den ersten Semestern

Mit den Übungsaufgaben und Klausuren erfolgt die Vorbereitung auf die ersten Prüfungen am Ende eines Semesters oder Studienjahres. Ihr Ziel ist jetzt, mit einer bestandenen Prüfung das entsprechende Modul mit einer Note abzuschließen.

Da am Anfang des Studiums i.a. eine große Zahl zu prüfender Studentinnen und Studenten teilnehmen, werden die ersten Prüfungen meistens als schriftliche Prüfungsklausuren durchgeführt. Erst in höheren Semestern mit zahlenmäßig weniger Studierenden werden oft mündliche Prüfungen bei der Hochschullehrerin, beim Hochschullehrer angesetzt.

Es ist *nicht* die gleiche Prüfungssituation, ob Sie eine Klausur schreiben, oder vor der Professorin bzw. dem Professor sitzen und befragt werden.

☛ *Welche Erfahrungen lassen sich aus Prüfungssituationen verallgemeinern?*

In einer schriftlichen Prüfungsklausur bearbeiten Sie konkrete Aufgaben in einem vorgegebenen Gesamtzeitvolumen. Jede Aufgabe besitzt eine erreichbare Punktzahl, die mit dem Aufgabentext ausgewiesen wird.

Falls Sie Mathematik studieren, geht es hier nicht nur darum, mathematische Instrumentarien auf konkrete Aufgaben anzuwenden. Sondern auch kleinere Fragestellungen der mathematischen Theorie (z.B. in Form kleiner Herleitungen oder Beweise) zu bearbeiten. Für Sie als angehende Mathematikerin oder Mathematiker sind Schlussfolgerungen aus der Theorie mindestens so wichtig wie die Bearbeitung konkreter Anwendungsaufgaben.

Falls Sie Studierende der Ingenieur- oder Wirtschaftswissenschaften sind, ergeben sich i.a. andere Schwerpunkte. In Ihrer zukünftigen Tätigkeit geht es meistens um die Anwendung erlernter mathematischer Instrumentarien auf konkrete Anwendungsfälle Ihres Fachgebietes. Sie haben i.a. also *nicht* die Aufgabe, eine mathematische Theorie weiter zu entwickeln. Das bedeutet, dass Sie auch nicht zu Experten in mathematischen Beweistechniken ausgebildet werden. Daher werden sich Ihre Klausuraufgaben fast ausschließlich auf mathematisches Grundwissen und typische Anwendungen aus Ihren Arbeitsgebieten beziehen.

Wenn Sie an einer mündlichen Prüfung bei der Hochschullehrerin, beim Hochschullehrer teilnehmen, befinden Sie sich in einer anderen Situation. Eine gute Prüferin, ein guter Prüfer wird zunächst Grundwissen, also zentrale Definitionen (Begriffe) und einfache Zusammenhänge daraus abfragen. Bei passenden Antworten geht es meistens etwas tiefer in die Theorie, zu wichtigen Folgerungen oder Anwendungen. Wenn Sie hier mithalten können, kommt es vor, dass dann auch Zusammenhänge zur Sprache kommen, die nicht naheliegend sind. Manchmal werden auch Inhalte angesprochen, die erst später gelehrt werden, oder Verbindungen zu anderen Teilgebieten der Mathematik aufweisen. Die Prüferin, der Prüfer wird bestrebt sein, „Ihren mathematischen Horizont“ auszuleuchten. Je besser Sie hier Ihr mathematisches Allgemeinwissen oder Ihr Wissen auf dem konkreten Teilgebiet artikulieren, umso sicherer können Sie ein gutes Prüfungsergebnis erwarten. Im Ablauf eines solchen Prüfungsgesprächs spielen daher auch psychologische Aspekte eine wesentliche Rolle. Aus Sicht der zu Prüfenden ist es eine hohe Kunst, das Prüfungsgespräch auf solche Themen zu lenken, bei denen sie gut Bescheid wissen. Wem das gelingt, der kann nicht durch die Prüfung fallen.

1.4 Wenn Frust aufkommt

Jede Person, die sich mit höherer Mathematik beschäftigt, kommt in die Situation, dass sie an einem Punkt nicht weiterkommt. Das kann bei einer Herleitung aus der Theorie, einem Beweisschritt oder bei der Bearbeitung einer Aufgabe vorkommen. Sie sollten sich darauf einstellen, dass auch Sie solche Situationen in ihrem Studium erleben werden.

☛ *Wie sollten Sie mit einer solchen Situation umgehen?*

Die Antwort lautet: Geben Sie nie sofort auf!

Sie sollten zunächst versuchen, die Ihnen zur Verfügung stehenden Hilfsmittel wie Skripte und Bücher zu Rate zu ziehen. Natürlich können Sie auch im Internet gezielt nach Fachbegriffen oder ganzen Zusammenhängen recherchieren. Häufig fehlt nur ein entscheidender Hinweis, um bei der Bearbeitung fortfahren zu können. Eventuell können Sie auch Ihre Kontakte nutzen, um einen helfenden Rat von einer anderen Person zu erhalten. Hartnäckigkeit und Ausdauer zahlen sich häufig aus.

Wenn aber nichts zum Erfolg führt, kann schnell großer Frust aufkommen.

Dann stellt sich die Frage, ob es Sinn macht, noch lange zu grübeln?

In einer solchen Situation wird oft empfohlen, die Mathematik zur Seite zu legen und zunächst etwas ganz anderes zu machen. Das lenkt Sie ab und vermeidet einen anhaltenden Tunnelblick. Nach einer Pause ist es manchmal möglich, dass Sie tatsächlich mit frischen Kräften und neuen Gedanken bei der Lösung des mathematischen Problems weiterkommen.

Falls es sich um eine schwierige Übungsaufgabe handelt, sollten Sie unbedingt bei der Besprechung der Lösungen in der Übungsgruppe gezielt nachfragen. Hier kann Ihnen die Übungsleiterin oder der Übungsleiter die aufgetretene Schwierigkeit erläutern und entsprechende Hinweise zu deren Überwindung geben. Die „Klippen" bei solchen Aufgaben sind i.a. bekannt.

Bei einem Modul, welches für einen Zeitraum von zwei Semestern konzipiert ist, müssen Sie nach dem ersten Semester eine Klausur schreiben. Nach Abschluss des zweiten Semesters können Sie die Prüfung ablegen. Folgende Situation kommt häufig vor: Die erste Klausur wird *nicht* bestanden. Die Studierenden setzen aber das Studium fort und bestehen nach dem zweiten Semester die Prüfung. Damit das Modul als abgeschlossen anerkannt wird, muss die Klausur später wiederholt und bestanden werden.

Die Bewältigung solcher oder ähnlicher Frust-Situationen ist in der Hochschulmathematik ein bekanntes Thema. Jeder muss lernen, damit umzugehen und eigene Erfahrungen sammeln.

☛ *Es gibt dazu die Empfehlung zum „Aufbau einer entsprechenden Frustrationstoleranz".*

Diese freundlich klingende Formulierung kennzeichnet das Problem recht gut.

Das haben alle Personen, die sich länger in der Mathematik betätigt hatten, mehrfach erlebt. Und es ist natürlich nicht nur ein Problem von Anfängerinnen und Anfängern.

1.5 Die Sprache der Mathematik

Vielleicht hatten Sie auch schon erfahren oder gesehen: Mathematische Fachtexte, Vorlesungsskripte und Lehrbücher werden oft in einer ungewohnt trockenen und gewöhnungsbedürftigen Sprache verfasst. Das ist kein Zufall sondern Absicht, denn die Sprache der Mathematik muss klar und eindeutig sein. Deshalb bedienen sich viele Autoren mathematischer Fachtexte festgelegter Formulierungen, die Sie mit Ihrem Studienbeginn in den Lehrveranstaltungen aufnehmen und erlernen. Trotzdem kann auch die höhere Mathematik oft anschaulich und lebendig dargestellt werden, was wir in diesem Buch anstreben wollen.

Einige einfache Beispiele zur Schreib- und Sprechweise in der Mathematik

Wenn es heißt, das mathematische Problem besitzt *eine* Lösung, bedeutet das, dass es *mindestens eine* Lösung gibt. Es kann eventuell auch mehrere Lösungen geben.

Wenn es dagegen heißt, das mathematische Problem besitzt *genau eine* Lösung, schließt das mehrere Lösungen aus. Es gibt dann nur eine Lösung.

Die Aufzählung aller Fälle, die durch einen Index oder einen Parameter angegeben werden, erfolgt oft mit folgender Schreibweise: für $k \in \mathbb{N}$ und $k = 1,\ldots,5$ gilt … Bedeutet, mit dem Index oder Parameter k werden genau fünf Fälle unterschieden, da k fünf verschiedene natürliche Zahlen annehmen kann. Deshalb ist es wichtig, immer genau anzugeben, aus welchem Zahlenbereich k stammt, und welche Werte k dort annehmen kann.

In der Informatik kann eine dazu völlig analoge Situation wie folgt ausgedrückt werden: für $k = 1(1)5$. Hier sind für den Index oder Parameter k der

Startwert 1, die Schrittweite 1 (in Klammern), und der Endwert 5 festgelegt. Damit werden die gleichen fünf Fälle wie oben unterschieden.

In mathematischen Texten finden Sie auch sogenannte *Quantoren* mit feststehenden Symbolen, oft im Zusammenhang mit einem Zahlenbereich.

Beispielsweise die folgenden:

- $\forall n \in \mathbb{N}$ bedeutet „für alle n als Elemente von $\mathbb{N}$ (den natürlichen Zahlen)“,
- $\exists x \in \mathbb{R}$ bedeutet „es existiert ein x als Element von $\mathbb{R}$ (den reellen Zahlen).“

Für die anderen Zahlenbereiche bestehen ebenfalls feststehende Symbole:

- $\mathbb{Z}$ für die Menge der ganzen Zahlen,
- $\mathbb{Q}$ für die Menge der rationalen Zahlen,
- $\mathbb{C}$ für die Menge der komplexen Zahlen.

☛ *Grundlegendes zu den Zahlenbereichen finden Sie im Kapitel 5 und im Abschnitt 7.1.*

Wird eine Eigenschaft für alle Elemente einer Menge gezeigt, gilt sie auch für alle Elemente einer echten Teilmenge dieser Menge. Beispielsweise bedeutet in der Euklidischen Ebene die Aussage: „In allen Rechtecken sind die beiden Diagonalen gleichlang“ auch, dass in allen Quadraten die beiden Diagonalen gleichlang sind.

Umgekehrt ist es so, dass z.B. eine Eigenschaft einer reellen Funktion f(x) für ein Intervall [a, b] gezeigt werden soll. Dann erfolgt der Nachweis zunächst für ein festes x_0 aus [a, b]. Wurde der Beweis erbracht, ist der Schluss einfach: Da x_0 beliebig aus [a, b] gewählt war, gilt die Eigenschaft für jeden Punkt x aus [a, b] und damit auf ganz [a, b].

Optisch hervorgehoben werden im Text meistens Definitionen, Sätze und der Beginn der zugehörigen Beweise sowie Beispiele. Üblich ist es, das Ende eines Beweises zu markieren, wie im vorliegenden Text mit dem Symbol ■.

Bei den Sätzen ist es wichtig, stets alle benötigten Voraussetzungen herauszustellen und die Aussage als Behauptung klar zu formulieren. Dazu müssen alle verwendeten Begriffe *vorher* definiert werden. Im Beweis muss dann die Logik von den Voraussetzungen bis zur Behauptung deutlich erkennbar sein.

☛ *Dieser kurze Ausschnitt sollte Sie für Symbole und Sprechweisen sensibilisieren.*

Die Mehrzahl der mathematischen Symbole kennen Sie aus der Schulmathematik. Wir werden vor allem in den Kapiteln 7 bis 12 die mathematische Ausdrucksweise und damit auch ihre Symbolik verwenden. An einigen Stellen gibt es für Sie dort gezielte Hinweise auf erstmals auftretende Symbole.

Im Kapitel 2 beginnen wir mit mathematischen Betrachtungen, die nur Ihr Schulwissen voraussetzen. Dazu eignen sich Aufgaben aus der sogenannten Unterhaltungsmathematik besonders gut.

Dieses Buch unterstützt Sie beim Einstieg in die höhere Mathematik: Es hilft Ihnen – anhand von ausgewählten Beispielen aus dem Grundstudium – mathematisches Denken zu erlernen, Standardmethoden anzuwenden und mathematische Theorien zu verstehen und dazu selbst Beiträge zu leisten.

Es baut auf dem Abiturwissen auf und ist somit ein idealer Begleiter für Sie, wenn Sie ...

→ demnächst ein Studium in einem MINT-Fach beginnen werden,

→ bereits einen MINT-Studiengang begonnen haben und sich in einem der ersten Semester befinden,

→ mathematisches Grundwissen auffrischen wollen,

→ allgemein an mathematik-historischen Darstellungen interessiert sind.

Das Buch ist methodisch anders aufgebaut als ein klassisches Lehrbuch, weil es nicht nur abstrakte Theorie bietet. Der Text ist speziell für Anfängerinnen und Anfänger leichter lesbar und im Inhalt besser verständlich. Es kann über längere Zeit zu verschiedenen Abschnitten Ihres Studiums und auch zum Selbststudium genutzt werden.

Lernziele am Anfang eines Kapitels, methodische Hinweise und viele Beispiele erhöhen Ihr Verständnis für die dargestellte Theorie. Behandelt werden folgende Themen: Zahlenbereiche, Transfinite Mengenlehre, Elementare Zahlentheorie, Reelle Analysis und Lineare Algebra. Weiterhin auch die Theorie der Mathematischen Beweisverfahren und die Methode der Axiomatisierung. Am Ende der Kapitel 2 bis 12 finden Sie jeweils drei Übungsaufgaben, deren ausführliche Lösungen Sie hinten im Buch nachschlagen können.

Das Buch bezieht durchgehend mathematik-historische Aspekte ein, die Ihnen einen Einblick in die Entwicklung der Mathematik geben. Als Einstieg erhalten Sie wertvolle Tipps für den Studienbeginn, am Ende des Buches Hinweise auf spätere, attraktive Berufsfelder.

www.uvhw.de

ISBN 978-3-86977-291-2

9 783869 772912